DIMOSTRAZIONI

LEZIONE 2

- Proprietà: $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{V}$ sottospazi $\Rightarrow \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ sottospazio di $\mathcal{V}$

Dim. Dati $z_1, z_2 \in \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ posso scrivere che $z_1 = x_1 + y_1$ e $z_2 = x_2 + y_2$

Devo dimostrare che $\alpha z_1 + \beta z_2 \in \mathcal{X} + \mathcal{Y}$.

$$\alpha z_1 + \beta z_2 = \alpha(x_1+y_1) + \beta(x_2+y_2) = \underbrace{(\alpha x_1 + \beta x_2)}_{\in \mathcal{X}} + \underbrace{(\alpha y_1 + \beta y_2)}_{\in \mathcal{Y}} \quad \blacksquare$$

- Proprietà: sia $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ e, con $z \in \mathcal{Z}$, sia $D(z) = \{(x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}) : x + y = z\}$.

Sia $z = x_1 + y_1$ con $x_1 \in \mathcal{X}$ e $y_1 \in \mathcal{Y}$. $\Rightarrow D_1(z) = \{(x,y) : x = x_1 + w,\ y = y_1 - w,\ w \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}\} =$

Dim. La dimostrazione si divide in due parti.

1) Siano $(x,y) \in D(z)$; $x + y = z$ e $x_1 + y_1 = z$, quindi $x + y = x_1 + y_1$, da cui

$x - x_1 = y_1 - y \triangleq w \Rightarrow w \in \mathcal{X}, w \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow w \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + w \\ y = y_1 - w \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y) \in D_1(z) = \{(x,y) : x = x_1 + w,\ y = y_1 - w,\ w \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}\}$$

2) Siano $(x,y) \in D_1(z)$; $\left.\begin{array}{l} x = x_1 + w \\ y = y_1 - w \end{array}\right\} \Rightarrow x + y = x_1 + y_1 = z \Rightarrow (x,y) \in D(z) \quad \blacksquare$

- Teorema: Sia $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una trasformazione lineare con $\dim(\mathcal{V}) = n$.

Allora $\rho(A) + \nu(A) = n$

Dim. Sia $\{x_1, x_2, \dots, x_h\}$ una base di $\operatorname{Ker} A$ e $\{x_1, x_2, \dots, x_h, x_{h+1}, \dots, x_n\}$ una base di $\mathcal{V}$. Ottengo:

$\rho(A) = $ rango di $A = \dim(\mathcal{V}) - \nu(A) = n - h \overset{?}{=} \dim(\operatorname{Im} A)$ da dimostrare.

$$\operatorname{Im}(A) = \operatorname{span}\{\underbrace{A(x_1), \dots, A(x_h)}_{=0 \text{ perché } \in \operatorname{Ker} A}, A(x_{h+1}), \dots, A(x_n)\} = \operatorname{span}\{A(x_{h+1}), \dots, A(x_n)\}$$

L'obiettivo è trovare che i vettori $x_{h+1}, \dots, x_n$ sono linearmente indipendenti.

Ragiono per assurdo: se così non fosse

$\alpha_{h+1} A(x_{h+1}) + \dots + \alpha_n A(x_n) = 0$ ma, per linearità, $A(\alpha_{h+1} x_{h+1} + \dots + \alpha_n x_n) = 0$ che significa che $(\alpha_{h+1} x_{h+1} + \dots + \alpha_n x_n) \in \operatorname{Ker} A$, ovvero che $\alpha_{h+1}, \dots, \alpha_n = 0$ perché quel vettore non può essere generato da questi vettori visto che non appartengono alla base di $\operatorname{Ker} A \Rightarrow$ assurdo! I vettori sono pertanto linearmente indipendenti. $\blacksquare$

• Proprietà: Sia $A: V \to W$ una trasformazione lineare. A è iniettiva se e solo se $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

Dim. Devo dimostrare l'implicazione in entrambi i versi:

1) A è iniettiva $\Rightarrow \operatorname{Ker} A = \{0\}$

Se A è iniettiva, siano $x_1, x_2 \in V$ con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow A(x_1) = A(x_2)$.
Per assurdo, sia $x_1 \in V$ tale che $x_1 \neq 0$ e $A(x_1) = 0$. Sia poi $x_2 = 0$ e $A(x_2) = 0$.
Ottengo $x_1 \neq x_2$ ma $A(x_1) = A(x_2)$, che viola la condizione di iniettività.
Arrivati a un assurdo, non può essere altro che $\operatorname{Ker} A = \{0\}$

2) $\operatorname{Ker} A = \{0\} \Rightarrow$ A è iniettiva

Per assurdo, se A non fosse iniettiva $\exists\, x_1, x_2 \in V$ tali che $x_1 \neq x_2$ e $A(x_1) = A(x_2)$.
Pertanto $x_1 - x_2 \neq 0$ e $A(x_1 - x_2) = 0$ e $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$. Assurdo! ☒

• Proprietà: Sia $A: V \to W$ una trasformazione lineare. A è iniettiva se e solo se trasforma insiemi linearmente indipendenti in insiemi linearmente indipendenti.

Dim. Devo dimostrare l'implicazione in entrambi i versi:

1) A è iniettiva $\Rightarrow$ dati $\{x_1, \dots, x_n\}$ linearmente indipendenti, $\{A(x_1), \dots, A(x_n)\}$ sono linearmente indipendenti.

Se così non fosse, per assurdo, $\exists\, \alpha_i$ non tutti nulli tali che $\alpha_1 A(x_1) + \dots + \alpha_n A(x_n) = 0$.
Per linearità $A(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = 0$, cioè $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \in \operatorname{Ker} A$, ma essendo A iniettiva per la relazione precedente, $\alpha_i = 0 \ \forall i$: assurdo!

2) Dati $\{x_1, \dots, x_n\}$ linearmente indipendenti, se lo sono anche $\{A(x_1), \dots, A(x_n)\} \Rightarrow$ A è iniettiva.
Se così non fosse, per assurdo, $\exists\, x_1 \in V$ tale che $x_1 \neq 0$ e $A(x_1) = 0$. Considero $\{x_1, x_2\}$ linearmente indipendenti. Trasformando, otterrei $\{A(x_1), A(x_2)\}$, ma $A(x_1) = 0$, ed è quindi un assurdo! Lo stesso accadrebbe se considerassi $\{x_1\}$ e la sua trasformazione $A(x_1) = 0$ che, quindi, non è più linearmente indipendente. ☒

LEZIONE 3

• Conseguenza: Se J_1 e J_2 sono sottospazi invarianti rispetto ad A, lo sono anche (a) $J_1 + J_2$ e (b) $J_1 \cap J_2$.

Dim. (a) Considero $x \in J_1 + J_2$ tale che $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in J_1$ e $x_2 \in J_2$; allora $A(x) = A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$, ma $A(x_1) \in J_1$ e $A(x_2) \in J_2$ essendo invarianti.

(b) Considero $x \in J_1 \cap J_2$ tale che $x \in J_1$ e $x \in J_2$; allora $A(x) = A(x \in J_1 \text{ e } x \in J_2) = A(x \in J_1)$ e $A(x \in J_2) = A(x \in J_1 \cap J_2)$. ☒

• Proprietà: Siano $\{b_1, \dots, b_n\}$ e $\{c_1, \dots, c_m\}$ le basi degli spazi vettoriali, nello stesso campo $\mathbb{F}$, V e W rispettivamente. Le componenti di $x \in V$ e $y \in W$ siano rispettivamente

$$\varphi_i,\ i=1,\dots,n \quad \text{e} \quad \eta_i,\ i=1,\dots,m$$

Ogni trasformazione lineare data $A_T : V \to W$, $v \to A_T(v)$ è univocamente rappresentata da $\eta = A\varphi$, dove

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^m, \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n, \quad A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

con gli elementi di A univocamente definiti da

$$A_T(b_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} c_j \qquad i = 1, \dots, n.$$

Dim.

Dato $v \in V$ tale che $v = \varphi_1 b_1 + \dots + \varphi_n b_n \to A_T(v) \in W$ cioè

$A_T(v) = \eta_1 c_1 + \dots + \eta_m c_m = \sum_{j=1}^{m} \eta_j c_j$ = ma è anche vero che

$$A_T(v) = A_T(\varphi_1 b_1 + \dots + \varphi_n b_n) = \varphi_1 A_T(b_1) + \dots + \varphi_n A_T(b_n) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} c_j = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \varphi_i \right)}_{\triangleq \eta_j} c_j$$

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \varphi_i = [a_{j1}, \dots, a_{ji}] \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} \Rightarrow \eta = A\varphi$$

infatti ∎

• Proprietà: Sia $A_T : V \to W$ una trasformazione lineare rappresentata dalla matrice $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ rispetto alle basi $\{b_1, \dots, b_n\}$ e $\{c_1, \dots, c_m\}$. Nelle nuove basi $\{p_1, \dots, p_n\}$ e $\{q_1, \dots, q_m\}$, A_T è rappresentata dalla matrice $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$:

$$B = Q^{-1} A P$$

dove $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ e $Q \in \mathbb{F}^{m \times m}$ sono matrici le cui colonne sono le componenti dei vettori delle nuove basi rispetto alle precedenti basi.

Dim: abbiamo visto che $\eta = P\varphi$, dove $\eta = \{b_1, \dots, b_n\}$ e $\varphi = \{p_1, \dots, p_n\}$, in V, mentre per W vale $s = Q\tau$ dove $s = \{c_1, \dots, c_m\}$ e $\tau = \{q_1, \dots, q_m\}$.

$$s = A\eta \to Q\tau = AP\varphi \to \tau = \underbrace{Q^{-1}AP}_{B}\varphi \Rightarrow B = Q^{-1}AP \quad ∎$$

$$\tau = B\varphi$$

• Teorema: Siano $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{V}$ tali che $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} = \mathcal{V}$. Con $\{b_1, \dots, b_h\}$, $\{c_1, \dots, c_k\}$ e $\{d_1, \dots, d_n\}$ si denotano le basi $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{V}$ $(h+k=n)$. Inoltre $X \in \mathbb{F}^{n \times h}$, $Y \in \mathbb{F}^{n \times k}$ siano le matrici base di $\mathcal{X}$ ed $\mathcal{Y}$ rispetto a tali basi.
Allora la trasformazione lineare proiezione su $\mathcal{X}$ lungo $\mathcal{Y}$ è rappresentata rispetto alla base $\{d_1, \dots, d_n\}$ da

$$P = [X\,O][X\,Y]^{-1}$$

Analogamente la trasformazione lineare proiezione su $\mathcal{Y}$ lungo $\mathcal{X}$ è rappresentata rispetto alla base $\{d_1, \dots, d_n\}$ da

$$Q = [O\,Y][X\,Y]^{-1}$$

Dim. Sia $v = x + y$ e $\gamma = X\alpha + Y\beta$ dove X e Y sono matrici e α, β vettori colonna.
Voglio mostrare che vale $\begin{cases} P\gamma = X\alpha \\ Q\gamma = Y\beta \end{cases}$. Dato che posso scrivere $\gamma = [X\,Y]\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix}$ come prodotto tra matrici, verifico:

$$P\gamma = [X\,O][X\,Y]^{-1} \cdot [X\,Y]\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix} = [X\,O]\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix} = X\alpha + O\beta = X\alpha$$

$$Q\gamma = [O\,Y][X\,Y]^{-1} \cdot [X\,Y]\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix} = [O\,Y]\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix} = O\alpha + Y\beta = Y\beta \quad \blacksquare$$

• Proprietà: Sia A invertibile, allora $A^{-1} = \dfrac{\operatorname{agg} A}{\det A}$.
Dim. Dimostriamo la proprietà con un esempio.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \operatorname{Agg} A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

Verifico che $A \cdot \dfrac{\operatorname{Agg} A}{\det A} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; procedo elemento per elemento:

$I_{11} = 1 \rightarrow (a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}) \cdot \dfrac{1}{\det A} = 1 \iff a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = \det A$ e infatti è la definizione del determinante di A sviluppato rispetto alla prima riga

$I_{12} = 0 \rightarrow (a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + a_{13}C_{23}) \cdot \dfrac{1}{\det A} = 0 \iff a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + a_{13}C_{23} = 0$ e infatti è il determinante della matrice B così fatta:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \det B = 0 \text{ perché } B \text{ ha due righe uguali.}$$

Se sviluppiamo il determinante di B rispetto alla seconda riga, troviamo esattamente $a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + a_{13}C_{23}$, essendo $C_{21} \triangleq a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$ e così via.

LEZIONE 4

• **Proprietà**: Un insieme ortonormale è insieme linearmente indipendente.

Dim. Se così non fosse, $\exists\, \alpha_i \neq 0$ tale che $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$ e, dato che i vettori sono ortonormali, $\langle \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n, u_i \rangle = 0$. Per linearità, si ha
$\alpha_1 \langle u_1, u_i\rangle + \ldots + \alpha_i \langle u_i, u_i\rangle + \ldots + \alpha_n \langle u_n, u_i\rangle = 0$ ma i prodotti scalari sono tutti nulli tranne $\langle u_i, u_i\rangle = 1$, pertanto affinché l'equazione sia verificata deve essere $\alpha_i = 0$ che confuta le ipotesi. ∎

• **Proprietà**: $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è ortogonale se e solo se $U^T U = U U^T = I$

Dim. Sia $U = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$, $u_i \in \mathbb{R}^n$ un insieme ortonormale. $U^T = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix}$.

$$U^T \cdot U = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} [u_1, \ldots, u_n] = \begin{bmatrix} u_1^T u_1 & u_1^T \cdot u_2 & \ldots & u_1^T u_n \\ \vdots & & & \vdots \\ u_n^T u_1 & \ldots & \ldots & u_n^T u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \ldots & & 1 \end{bmatrix} = I$$

in virtù del fatto che i vettori sono ortogonali tra loro.

• **Proprietà**: Il prodotto di più matrici ortogonali è ancora una matrice ortogonale.

Dim. $(U_1 U_2 \ldots U_n)^{-1} = U_n^{-1} U_{n-1}^{-1} \ldots U_1^{-1} = U_n^T U_{n-1}^T \ldots U_1^T$

$$(U_1 U_2 \ldots U_n)(U_1 U_2 \ldots U_n)^{-1} = \underbrace{U_1 U_2 \ldots \underbrace{U_n U_n^T}_{I} U_{n-1}^T \ldots U_1^T}_{} = I \quad ∎$$

• **Proprietà**: Sia V uno spazio vettoriale con prodotto interno e $\dim V < \infty$. Le componenti $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ di un vettore $x \in V$ rispetto alla base ortonormale $\{u_1, \ldots, u_n\}$ sono date da:

$$\varphi_i = \langle u_i, x \rangle \qquad i = 1, \ldots, n$$

Dim. $\langle x, u_i \rangle = \langle u_i, x\rangle = \langle \varphi_1 u_1 + \ldots + \varphi_n u_n, u_i \rangle = \varphi_1 \underbrace{\langle u_1, u_i\rangle}_{=0} + \ldots + \varphi_i \underbrace{\langle u_i, u_i\rangle}_{=1} + \ldots + \varphi_n \underbrace{\langle u_n, u_i\rangle}_{=0} = \varphi_i$

• **Conseguenza**: Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, vale (con il prodotto interno usuale su $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$):

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y\rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^m$$

Dim.: $\langle Ax, y\rangle = (Ax)^T y = x^T A^T y = x^T (A^T y) = \langle x, A^T y \rangle$ ∎

• **Proprietà**: Sia $\mathcal{X} \subseteq V$ spazio vettoriale con prodotto interno $\Rightarrow V = \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}^\perp$.

Dim. $\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp = \{0\}$, infatti se $x \in \mathcal{X}$ e $x \in \mathcal{X}^\perp$ significa che $x \in \mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\perp$ e cioè che x deve essere ortogonale a qualsiasi vettore di $\mathcal{X}$, ovvero sé stesso $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
$V = \mathcal{X} + \mathcal{X}^\perp$: è ovvio che $\mathcal{X} + \mathcal{X}^\perp \subseteq V$, provo che $\mathcal{X} + \mathcal{X}^\perp \supseteq V$. Sia $\{u_1, \ldots, u_h\}$ una base ortonormale di $\mathcal{X}$. Scelgo $z \in V$, quindi $x = \sum_{i=1}^{h} \varphi_i u_i$ con $\varphi_i = \langle z, u_i\rangle$.
Sia $y = z - x$ cioè $z = x + y$. $y \in \mathcal{X}^\perp$ se $\langle z - x, u_i\rangle = 0$ $\forall i \in [1, h]$ essendo u_i una base:
$\langle z - \varphi_1 u_1 - \ldots - \varphi_h u_h, u_i \rangle = \underbrace{\langle z, u_i\rangle}_{\varphi_i} - \varphi_1 \underbrace{\langle u_1, u_i\rangle}_{0} - \ldots - \varphi_i \underbrace{\langle u_i, u_i\rangle}_{1} - \ldots - \varphi_h \underbrace{\langle u_h, u_i\rangle}_{0} = \varphi_i - \varphi_i = 0$ ∎

• Proprietà: $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vale $\operatorname{Ker} A^T = (\operatorname{im} A)^\perp$

Dim. Dimostro le due implicazioni:

1) $y \in \operatorname{Ker} A^T \Rightarrow \langle A^T y, x\rangle = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ essendo $A^T y = 0$. Per la proprietà già vista sappiamo che $\langle A^T y, x\rangle = \langle y, (A^T)^T x\rangle = \langle y, Ax\rangle = 0$. Ax è un qualunque elemento dell'immagine di A, pertanto $y \in (\operatorname{im} A)^\perp$.

2) $y \in (\operatorname{im} A)^\perp \Rightarrow \langle y, AA^T y\rangle = 0$ essendo y ortogonale a qualsiasi vettore dell'imm di A, quale è $AA^T y$. Per la proprietà già vista posso scrivere:
$\langle y, AA^T y\rangle = \langle A^T y, A^T y\rangle = 0$ che è vera se e solo se $A^T y = 0$, cioè se $y \in \operatorname{Ker} A^T$

• Proprietà: $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vale $\operatorname{im} A = \operatorname{im}(AA^T)$

Dim. Per questa dimostrazione serve prima dimostrare un'altra proprietà:

Proprietà: Se $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$, $A(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = A\mathcal{X} + A\mathcal{Y}$

Dim.: Sia $z \in A\{\mathcal{X}+\mathcal{Y}\}$, allora $z = A(x+y)$ con $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$ e $z = Ax + Ay$ in cui $Ax \in A\mathcal{X}$ e $Ay \in A\mathcal{Y}$ pertanto $z \in A\mathcal{X} + A\mathcal{Y}$. Viceversa, se $z \in A\mathcal{X} + A\mathcal{Y}$, allora $\exists x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{Y}$ tali che $z = Ax + Ay = A(x+y) \in A(\mathcal{X}+\mathcal{Y})$ ∎

Posso ora dimostrare che $\operatorname{im} A = \operatorname{im}(AA^T)$.

$$\operatorname{im} A = A(\mathbb{R}^n) \underset{\text{da prima}}{=} A(\operatorname{im} A^T + \operatorname{Ker} A) \underset{\text{dalle proprietà sopra}}{=} A(\operatorname{im} A^T) + A(\operatorname{Ker} A) = \operatorname{im}(AA^T) + \underset{\text{solo il vettore nullo} \in \operatorname{Ker} A \cdot A}{\{0\}} = \operatorname{im}(AA^T)$$ ∎

• Conseguenza: Sia $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ ed U una sua matrice di base ortonormale. Le matrici di proiezione ortogonale su $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}^\perp$ sono:

$P = UU^T \qquad$ e $\qquad Q = I - UU^T$

Dim: Dalla definizione sappiamo che: (base ortonormale di $\mathcal{X}^T$)

$$P = [X\,O][X\,Y]^{-1} = [U\,O][U\,U_2]^{-1} = [U\,O]\begin{bmatrix} U^T \\ U_2^T \end{bmatrix} = UU^T + \cancel{O U_2^T} = UU^T$$ in quanto, essendo U ortonormale, la sua trasposta è uguale alla sua inversa $U^T = U^{-1}$

Per quanto riguarda Q, sia $z = x + y$, $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{X}^\perp$ allora $Pz = x$ e $Qz = y$ per definizione. $Qz = y = z - x = z - Pz = (I-P)z$ pertanto $Q = I - P = I - UU^T$ ∎

Teorema (della proiezione ortogonale)

Sia $\mathcal{X}$ un sottospazio di $\mathcal{V}$, spazio vettoriale con prodotto interno e P la proiezione ortogonale su $\mathcal{X}$. Se $x \in \mathcal{V}$, allora $\|x - Px\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in \mathcal{X}$.

Dim. $\|x-y\|^2 = \|\underset{\in \mathcal{X}^\perp}{(x-Px)} + \underset{\in \mathcal{X}}{(Px-y)}\|^2 =$ dato che i due vettori sono ortonormali $\forall y \in \mathcal{X}$ si ha

$= \|x-Px\|^2 + \|Px-y\|^2 \geq \|x-Px\|^2$. Estraendo la radice quadrata si ha $\|x-y\| \geq \|x-Px\|$ $\forall y \in \mathcal{X}$ ∎

• **Lemma**: Sia V uno spazio vettoriale con prodotto interno. Allora se $x, y \in V$ so[no] ortogonali: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Dim.: $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle = \langle x,x \rangle + \cancel{\langle x,y \rangle} + \cancel{\langle y,x \rangle} + \langle y,y \rangle = \|x\|^2 +$
perchè ortogonali

• **Teorema**: Sia $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ ed X una sua matrice di base. Le matrici di proiezione ortogonale su $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}^\perp$ sono:

$$P = X(X^TX)^{-1}X^T \qquad e \qquad Q = I - X(X^TX)^{-1}X^T$$

Dim: Suppongo $x \in \mathcal{X}$ tale che $x = Xa$ con $a \in \mathbb{R}^h$ e $h = \dim(\mathcal{X})$. Devo verificare che Px
$X(X^TX)^{-1}X^T \cdot Xa = X\underbrace{(X^TX)^{-1}(X^TX)}_{I}a = Xa = x$. Per verificare che sia ortogonale, prendo $y \in \mathcal{X}^\perp$ tale che $X^Ty = 0 \Rightarrow Py = X(X^TX)^{-1}\underbrace{(X^Ty)}_{0} = 0$.
Sia $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $v = x+y$ con $x \in \mathcal{X}$ e $y \in \mathcal{X}^\perp$, allora deve essere $Pv = x$.
$P(v) = P(x+y) = Px + Py = x + 0 = x$ ∎

• **Proprietà**: Sia X una matrice di base di $\operatorname{im} A$, A^TX è una matrice di base di $\operatorname{im} A^T$.

Dim: $\operatorname{im} A^T = \operatorname{im}(A^TA) = A^T(\operatorname{im} A) = A^T(\operatorname{im} X) = \operatorname{im}(A^TX)$ di rango massimo essendo X di rango massimo ∎

• **Teorema**: Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. La pseudoinversa di A è

$$A^+ = A^TX(X^TAA^TX)^{-1}X^T$$

dove X è una matrice di base di $\operatorname{im} A$.

Dim: $A^+ = (A^+A)A^+ = A^TX(X^TAA^TX)^{-1}X^TAA^+ = A^TX(X^TAA^TX)^{-1}\underbrace{X^TX(X^TX)^{-1}}_{I}X^T =$
$= A^TX(X^TAA^TX)^{-1}X^T$ ∎

• **Proprietà**: Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se $m \leq n$, $\rho(A) = m$ allora $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$.

Dim.: $A^+ = A^TAA^T(AA^TAA^TAA^T)^{-1}AA^T = A^TAA^T(AA^TAA^T)^{-1}(AA^T)^{-1}AA^T =$
$= A^T\underbrace{AA^T(AA^T)^{-1}}_{I}(AA^T)^{-1} = A^T(AA^T)^{-1}$. ∎

Proprietà: Sia $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se $m \geq n$ e $\rho(A) = n$ allora $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$

Dim.: $A^TA(A^TAA^TA)^{-1}A^T = \underbrace{A^TA(A^TA)^{-1}}_{I}(A^TA)^{-1}A^T = (A^TA)^{-1}A^T$ ∎

Proprietà: $\mathcal{X} \cap (\mathcal{Y} + \mathcal{Z}) \supseteq (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) + (\mathcal{X} \cap \mathcal{Z})$

Dim: Sia $w \in (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) + (\mathcal{X} \cap \mathcal{Z})$ che posso scrivere come $w = x_1 + x_2$ con $x_1 \in \mathcal{X}$ e $x_1 \in \mathcal{Y}$
$x_2 \in \mathcal{X}$ e $x_2 \in \mathcal{Z}$. Allora $w \in \mathcal{X}$ perchè x_1 e $x_2 \in \mathcal{X}$, ma $w \in \mathcal{Y} + \mathcal{Z}$ anche, per cui $w \in \mathcal{X} \cap (\mathcal{Y} + \mathcal{Z})$. ∎

- **Proprietà**: $(\mathcal{X}+\mathcal{Y})^\perp = \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{Y}^\perp$

Dim.: Dividiamo la dimostrazione in due parti:

- se $z \in (\mathcal{X}+\mathcal{Y})^\perp$ allora $z \triangleq \{z : \langle z, x+y\rangle = 0 \ \forall x\in\mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{Y}\}$

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow \langle z,x\rangle = 0 \quad \forall x\in\mathcal{X} \\ x=0 \Rightarrow \langle z,y\rangle = 0 \quad \forall y\in\mathcal{Y}\end{array}\right] \Rightarrow z \in \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{Y}^\perp$$

- se $z \in \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{Y}^\perp$ allora $z \triangleq \{z : z\in\mathcal{X}^\perp, z\in\mathcal{Y}^\perp\}$

$$\left.\begin{array}{l} \langle z,x\rangle = 0 \quad \forall x\in\mathcal{X} \\ \langle z,y\rangle = 0 \quad \forall y\in\mathcal{Y}\end{array}\right] \Rightarrow \langle z, x+y\rangle = 0 \quad \forall x\in\mathcal{X}, \forall y\in\mathcal{Y}\text{, ovvero } z\in(\mathcal{X}+\mathcal{Y})^\perp \ \blacksquare$$

- **Proprietà**: $(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})^\perp = \mathcal{X}^\perp + \mathcal{Y}^\perp$

Dim.: Utilizzando la proprietà precedente, sostituisco a $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ i loro ortogonali $(\mathcal{X}^\perp+\mathcal{Y}^\perp)^\perp = (\mathcal{X}^\perp)^\perp \cap (\mathcal{Y}^\perp)^\perp = \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$. Ora faccio il complemento ortogonale e ottengo $\mathcal{X}^\perp + \mathcal{Y}^\perp = (\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})^\perp$ $\blacksquare$

- **Proprietà**: $A^{-1}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}) = A^{-1}\mathcal{X} \cap A^{-1}\mathcal{Y}$

Dim.: $A^{-1}\mathcal{X} = \{z : Az\in\mathcal{X}\}$, $A^{-1}\mathcal{Y} = \{z : Az\in\mathcal{Y}\}$

$A^{-1}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}) = \{z : Az \in \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}\}$. Dimostro la relazione in entrambi i versi:

- se $A^{-1}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}) \subseteq A^{-1}\mathcal{X}\cap A^{-1}\mathcal{Y}$, significa $z\in A^{-1}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}) \Rightarrow Az\in\mathcal{X}$ e $Az\in\mathcal{Y}$ $\Rightarrow z\in A^{-1}\mathcal{X}$ e $z\in A^{-1}\mathcal{Y}$
- se $A^{-1}\mathcal{X}\cap A^{-1}\mathcal{Y} \subseteq A^{-1}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$ significa $z\in A^{-1}\mathcal{X}\cap A^{-1}\mathcal{Y} \Rightarrow Az\in\mathcal{X}$ e $Az\in\mathcal{Y}$ $\Rightarrow Az\in\mathcal{X}\cap\mathcal{Y} \Rightarrow z\in A^{-1}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$ $\blacksquare$

- **Proprietà**: $\mathcal{X}\cap(\mathcal{Y}+\mathcal{Z}) = (\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})+(\mathcal{X}\cap\mathcal{Z})$

Dim. Occorre dimostrare che la relazione vale in questi sei casi:

- se $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{Y}$, allora $\mathcal{X}\cap(\mathcal{Y}+\mathcal{Z}) \subseteq (\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})+(\mathcal{X}\cap\mathcal{Z})$ infatti $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{X}+(\mathcal{X}\cap\mathcal{Z})$
- se $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{Z}$, allora $\mathcal{X}\cap(\mathcal{Y}+\mathcal{Z}) \subseteq (\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})+(\mathcal{X}\cap\mathcal{Z})$ infatti $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{X}+(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$
- se $\mathcal{Y}\subseteq\mathcal{Z}$, allora $\mathcal{X}\cap(\mathcal{Y}+\mathcal{Z}) = (\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})+(\mathcal{X}\cap\mathcal{Z})$ infatti $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y} = \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$
- se $\mathcal{X}\supseteq\mathcal{Y}$, allora $\mathcal{X}\cap(\mathcal{Y}+\mathcal{Z}) = (\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})+(\mathcal{X}\cap\mathcal{Z})$ infatti $\mathcal{Y}+\mathcal{X}\cap\mathcal{Z} = \mathcal{Y}+\mathcal{X}\cap\mathcal{Z}$
- se $\mathcal{X}\supseteq\mathcal{Z}$, allora $\mathcal{X}\cap(\mathcal{Y}+\mathcal{Z}) = (\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})+(\mathcal{X}\cap\mathcal{Z})$ infatti $\mathcal{Z}+\mathcal{X}\cap\mathcal{Y} = \mathcal{Z}+\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$
- se $\mathcal{Y}\supseteq\mathcal{Z}$, allora $\mathcal{X}\cap(\mathcal{Y}+\mathcal{Z}) = (\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})+(\mathcal{X}\cap\mathcal{Z})$ infatti $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y} = \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$ $\blacksquare$

- **Proprietà**: $A\mathcal{X}\subseteq\mathcal{Y} \Leftrightarrow A^T\mathcal{Y}^\perp \subseteq \mathcal{X}^\perp$

Dim.: $A\mathcal{X}\subseteq\mathcal{Y} \Leftrightarrow \forall x\in\mathcal{X}, \{Ax\in\mathcal{Y}\} \Leftrightarrow \forall x\in\mathcal{X}, \{Ax\in(\mathcal{Y}^\perp)^\perp\} \Leftrightarrow \{Ax$ è ortogonale a tutti i vettori di $\mathcal{Y}^\perp\}$ $\Leftrightarrow \langle Ax, z\rangle = 0 \ \forall z\in\mathcal{Y}^\perp \Leftrightarrow \langle x, A^Tz\rangle = 0 \ \forall z\in\mathcal{Y}^\perp \Leftrightarrow A^Tz\in\mathcal{X}^\perp \ \forall z\in\mathcal{Y}^\perp \Leftrightarrow A^T\mathcal{Y}^\perp\subseteq\mathcal{X}^\perp$ $\blacksquare$

• Proprietà: $(A^{-1}\mathcal{Y})^\perp = A^T \mathcal{Y}^\perp$

Dim.: Sia Y la matrice di base di $\mathcal{Y}^\perp$, allora $\operatorname{im} Y = \mathcal{Y}^\perp$. Come abbiamo visto, $\operatorname{im} Y = (\operatorname{Ker} Y^T)^\perp \Leftrightarrow \mathcal{Y}^\perp = (\operatorname{Ker} Y^T)^\perp \Leftrightarrow \mathcal{Y} = \operatorname{Ker} Y^T$.

$$A^T \mathcal{Y}^\perp = A^T(\operatorname{im} Y) = \operatorname{im}(A^T Y) = \operatorname{Ker}(Y^T A)^\perp = (\{z : Y^T A z = 0\})^\perp = (\{z : Az \in \operatorname{Ker} Y^T\})^\perp =$$
$$= (\{z : Az \in \mathcal{Y}\})^\perp = (A^{-1}\mathcal{Y})^\perp \quad \blacksquare$$

LEZIONE 5

• Proprietà: Se λ, x sono un autovalore complesso ed il corrispondente autovettore, allora x^* è l'autovettore corrispondente a λ^*.

$$(Ax)^* = Ax^* \qquad e \qquad (\lambda x)^* = \lambda^* x^*$$

Dim.: Parto da $Ax = \lambda x$ e coniugo ambo i membri $(Ax)^* = (\lambda x)^*$. Per la proprietà dei numeri complessi, il coniugato del prodotto è uguale al prodotto dei coniugati, quindi $A^* x^* = \lambda^* x^*$, ma essendo A reale $A^* = A$ da cui segue $Ax^* = \lambda^* x^*$. $\blacksquare$

• Teorema: Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se gli autovalori di A sono distinti i corrispondenti autovettori sono linearmente indipendenti.

Dim.: Ragioniamo per assurdo. Siano $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ autovalori e $\{v_1, \dots, v_n\}$ autovettori, supponiamo che $\{v_1, \dots, v_h\}$ siano linearmente indipendenti mentre $\{v_{h+1}, \dots, v_n\}$ siano linearmente dipendenti. Ciò significa che posso scrivere $v_j = \sum_{i=1}^{h} \alpha_{ji} v_i$ per $j = h+1, \dots$

$$\left.\begin{aligned} A v_j &= A\Big(\sum_{i=1}^{h} \alpha_{ji} v_i\Big) = \sum_{i=1}^{h} \alpha_{ji} A(v_i) = \sum_{i=1}^{h} \alpha_{ji} \lambda_i v_i \\ A v_j &= \lambda_j v_j = \lambda_j \sum_{i=1}^{h} \alpha_{ji} v_i = \sum_{i=1}^{h} \alpha_{ji} \lambda_j v_i \end{aligned}\right\} \text{queste due espressioni devono essere uguali, pertanto la differenza è nulla}$$

$\sum_{i=1}^{h} \alpha_{ji}(\lambda_i - \lambda_j) v_i = 0$ ma i primi h vettori sono linearmente indipendenti, quindi $\alpha_{ji}(\lambda_i - \lambda_j) = 0$ per $i = 1, \dots, h$. I coefficienti α_{ji} non possono essere tutti nulli perché questi vettori sono linearmente dipendenti (per ipotesi), quindi per almeno una coppia deve essere $\lambda_i - \lambda_j = 0 \Rightarrow \lambda_i = \lambda_j$ che confuta l'ipotesi iniziale di autovalori distinti. Assurdo! $\blacksquare$

• Proprietà: Matrici simili hanno gli stessi autovalori, ovvero $\sigma(A) = \sigma(T^{-1}AT)$ $\forall T^{n\times n}$.

Dim.: Gli autovalori di A sono dati da $\det(\lambda I - A) = 0$. Occorre quindi dimostrare che $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - T^{-1}AT)$.

$$\det(\lambda I - T^{-1}AT) = \det(\lambda T^{-1}T - T^{-1}AT) = \det(T^{-1}\lambda I T - T^{-1}AT) = \det(T^{-1}(\lambda I - A)T) =$$
$$= \cancel{\det} T^{-1} \cdot \det(\lambda I - A) \cdot \cancel{\det T} = \det(\lambda I - A)$$

Dato che T è invertibile, il determinante dell'inversa è il reciproco di $\det T$. $\blacksquare$

• <u>Teorema</u>: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è diagonalizzabile se e solo se ammette un insieme linearmente indipendente di n autovettori.

<u>Dim</u>. Dimostriamo le due implicazioni:

- Sufficienza: supponiamo $\{v_1, \dots, v_n\}$ autovettori linearmente indipendenti associati a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalori. Allora $A v_i = \lambda_i v_i \quad i = 1, \dots, n$ o, in forma matriciale

$$A[v_1, \dots, v_n] = [\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n] = \underbrace{[v_1, \dots, v_n]}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\text{matrice diagonale } \Lambda} \Rightarrow AT = T\Lambda \Rightarrow T^{-1}AT = T^{-1}T\Lambda$$

$$\Rightarrow \Lambda = T^{-1}AT$$

- Necessità: supponiamo esista T non singolare tale che $\Lambda = T^{-1}AT$. Ottengo

$$T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = TT^{-1}AT \text{ ; definisco } T = [v_1, \dots, v_n] \text{ e quindi ottengo}$$

$$[v_1, \dots, v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = A[v_1, \dots, v_n] \qquad [v_1\lambda_1, \dots, v_n\lambda_n] = [Av_1, \dots, Av_n] \text{ cioè } Av_i = \lambda_i v_i$$

$i = 1, \dots, n$ ∎

• <u>Lemma</u>: Dato un polinomio $b(\lambda) = b_k \lambda^k + \dots + b_0$, $\mathrm{Ker}(b(A))$ è un sottospazio invariante in A, cioè $A(\mathrm{Ker}(b(A))) \subseteq \mathrm{Ker}(b(A))$

<u>Dim</u>.: Se $x \in \mathrm{Ker}(b(A))$ significa $b(A) \cdot x = 0 \rightarrow (b_k A^k + \dots + b_0 I)x = 0$ moltiplico per A

$A(b_k A^k + \dots + b_0 I)x = 0 \rightarrow (b_k A^{k+1} + \dots + b_0 A)x = 0 \rightarrow (b_k A^k + \dots + b_0 I) Ax = 0$ che significa che $Ax \in \mathrm{Ker}(b(A))$ ∎